PublicacionesDidácticas
www.publicacionesdidacticas.com

Sistemas de ecuaciones lineales. Discusión y resolución

Título: Sistemas de ecuaciones lineales. Discusión y resolución. **Target**: Profesores de Matemáticas. Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.. **Asignatura**: Matemáticas. **Autor**: Emiliana Oliván Calzada, Licenciada en Matemáticas, Profesora de Matemáticas en Educación Secundaria.

1. INTRODUCCIÓN

Es conocida la importancia que tienen los sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de problemas, tanto en la matemática pura como en la aplicada.

En este tema vamos a tratar la resolución de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas cada uno y con coeficientes en un cuerpo K (que habitualmente será R, pero puede ser Q o C).

Existen diversos métodos o procedimientos que nos permiten resolver un sistema de ecuaciones. La aplicación de uno u otro depende de la complejidad del sistema. Para resolver sistemas de dos o tres ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas respectivamente se utilizarán métodos clásicos: sustitución, igualación y reducción. Estos métodos son poco adecuados cuando aumente el número de ecuaciones y de incógnitas.

En este tema se revisan los principales métodos para resolver ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas: Regla de Cramer, Teorema de Rouché-Fröbenius (conocido también bajo el nombre de Kronecker), método de Gauss y método de eliminación de Gauss- Jordan.

La Teoría de Espacios Vectoriales y de Aplicaciones Lineales nos va a permitir deducir resultados sobre el conjunto de soluciones.

Consideramos conocidos todos los resultados relativos a matrices y determinantes, así como combinación lineal de vectores, vectores linealmente dependientes o independientes, etc.…

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definiciones

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y coeficientes en un cuerpo K es un sistema de m ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}, \text{ donde } (a_{ij}) \in K,\ b_i \in K \quad para \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Los a_{ij} reciben el nombre de coeficientes, los b_i son los términos independientes y los x_j son las incógnitas. Diremos que el sistema es homogéneo si $b_i = 0 \quad para \quad 1 \leq i \leq m$

El sistema anterior se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \ a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ o de forma sencilla como $AX = B$.

Diremos que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in K^n$ es solución del sistema si al sustituir cada incógnita x_i por α_i las ecuaciones se transforman en identidades. Al conjunto formado por todas las soluciones lo llamaremos solución del sistema.

Dos sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas son equivalentes si toda solución de uno es también solución del otro. También serán equivalentes si ambos carecen de soluciones.

Observaciones:

1. En la definición de sistemas equivalentes en ningún momento se alude a que deben mantener el mismo número de ecuaciones.
2. Si una ecuación está repetida, el sistema no varía si se incluye una sola vez.
3. La ecuación de lugar i: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$ la denotaremos como $e_i(x) = b_i$ o por E_i.

Definición: Dado el sistema $\left.\begin{matrix} e_1(x) = b_1 \\ e_2(x) = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_m(x) = b_m \end{matrix}\right\}$ diremos que una ecuación $e(x) = b$ es combinación lineal de las ecuaciones del sistema si $\exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in K$ tal que:

$$e(x) = \lambda_1 \cdot e_1(x) + \lambda_2 \cdot e_2(x) + \cdots\cdots + \lambda_m \cdot e_m(x) \text{ y } b = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \cdots\cdots + \lambda_m \cdot b_m$$

Proposición: Dado un sistema de m ecuaciones lineales $E_1, E_2, ..., E_m$ y n incógnitas, se pueden obtener sistemas equivalentes efectuando las siguientes operaciones elementales:

a) Permutar el orden de las ecuaciones.
b) Sustituir una ecuación E_i por el resultado de multiplicar todos los elementos de la ecuación por un escalar $\lambda \in K^*$.
c) Sustituir una ecuación E_i por el resultado de sumar a la ecuación el producto por un escalar $\lambda \in K^*$ por otra ecuación E_j $(i \neq j)$ o más generalmente sustituir E_i por $E_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j E_j$ para cualquier $\lambda_j \in K^*$ (alguno, aunque no todos puede ser nulo, se elimina y ya está)
d) Añadir o suprimir en el sistema una ecuación que sea combinación lineal de otras ecuaciones del sistema.

Demostración: Basta ver que la solución antes de hacer los cambios coincide con la solución después de hacer los cambios.

Tipos de sistemas

Según el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales los podemos clasificar en:

$$\begin{cases} \underset{(\text{cuando tienen solución})}{Compatibles} \begin{cases} Determinados: Cuando \ \ la \ \ solución \ \ es \ \ única \\ Indeterminados: Cuando \ \ la \ \ solución \ \ es \ \ múltiple \end{cases} \\ Incompatibles: Cuando \ \ no \ \ tienen \ \ solución \end{cases}$$

Observación: Un sistema homogéneo es siempre compatible ya que $(0,\dots,0)$ es solución. Dicha solución se llama solución trivial.

3. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Definición: Dado un sistema de ecuaciones lineales $A\cdot X = B$, llamaremos matriz ampliada a la matriz que se obtiene al añadir la matriz columna B a la matriz A como $(n+1)-ésima$ columna. Se representa por $(A|\ B)$, es decir: $(A|\ B)=\left(\begin{array}{c|c} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ \ a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Teorema: (Rouché-Fröbenius)

Sea $A\cdot X = B$ la representación matricial de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. $A\cdot X = B$ es compatible $\Leftrightarrow rang(A) = rang(A|B)$. Además será compatible determinado si $rang(A) = n^o \ de \quad incógnitas \ = n$ e indeterminado en caso contrario.

Demostración:

$\Rightarrow)$ Supongamos que el sistema es compatible y sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in R^n$ una solución del mismo. Se tienen así las siguientes identidades:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot\alpha_1 + a_{12}\cdot\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\cdot\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\cdot\alpha_1 + a_{22}\cdot\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\cdot\alpha_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot\alpha_1 + a_{m2}\cdot\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\cdot\alpha_n = b_m \end{array}\right\}$$

. Si llamamos $\vec{a}_i = (a_{1i}\ a_{2i}\ a_{3i}\cdots a_{mi})^t$ y $\vec{b} = (b_1\ b_2\ b_3\cdots b_m)^t$ $1 \le i \le n$ el sistema lo podemos escribir como: $\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b}$ lo cual indica que $\vec{b}$ es combinación lineal de $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\}$ que son las columnas de A. Entonces $rang(A) = rang(A|B)$.

Si el sistema es compatible determinado, la combinación lineal anterior es única y se deduce que $\{\vec{a}_1,\cdots\cdot,\vec{a}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y de aquí podemos afirmar que $rang(A)=n$.

$\Leftarrow)$Como por hipótesis $rang(A)=rang(A|B)$ se tiene que $\vec{b}$ es combinación lineal de $\{\vec{a}_1,\cdots\cdot,\vec{a}_n\}\Rightarrow\exists\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in R$ tal que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{a}_i=\vec{b}$. Entonces $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in R^n$ es solución del sistema y el sistema es compatible.

Si $rang(A)=n\Rightarrow\{\vec{a}_1,\cdots\cdot,\vec{a}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, lo cual significa que la combinación lineal es única, siendo también la solución del sistema.

Corolario: Sea $A\cdot X=B$ sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Se verifica:

a) $A\cdot X=B$ es compatible determinado $\Leftrightarrow rang(A)=rang(A|B)=n$

b) $A\cdot X=B$ es compatible indeterminado $\Leftrightarrow rang(A)=rang(A|B)<n$

c) $A\cdot X=B$ es incompatible $\Leftrightarrow rang(A)\neq rang(A\mid B)$

Demostración: Inmediata utilizando el teorema anterior.

Observación: Si $rang(A)=rang(A|B)=k<n$, la solución del sistema compatible indeterminado se expresa en función de $(n-k)$ parámetros.

4. REGLA DE CRAMER

Definición: Diremos que un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnita es de Cramer si tiene solución única, es decir, si es compatible determinado.

Proposición: Un sistema con igual nº de ecuaciones que de incógnitas es de Cramer si y solo si $|A|\neq 0$.

Demostración: Sea el sistema $A\cdot X=B$ con $A\in M_{n\times n}$. Entonces $(A\mid B)\in M_{n\times(n+1)}$ siendo por tanto $rang(A\mid B)\leq n$. Sabemos que $rang(A)=n\ \ si\ \ |A|\neq 0$. Entonces aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado si y solo si $|A|\neq 0$.

Regla de Cramer

Los sistemas de Cramer tienen una forma especial de resolverse que es aplicando la llamada regla de Cramer. Veamos en que consiste:

La condición $|A|\neq 0$ nos permite garantizar que existe A^{-1} (matriz inversa de la matriz A).

Así, dado el sistema $A \cdot X = B$ podemos despejar X de la siguiente forma:

$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$, siendo la solución única. Veamos ahora como desarrollar esta expresión para obtener el valor de cada incógnita.

Sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t$ y podemos escribir $X = A^{-1}B$ como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \cdots\cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \cdots\cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} \cdots\cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

, siendo A_{ij} el adjunto del elemento a_{ij} de la matriz A, es decir,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} \cdots a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

, y operando tenemos que:

$$x_j = \frac{b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}}{|A|} = \frac{\det\left(\vec{a}_1, \cdots \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \cdots \vec{a}_n\right)}{|A|}$$

, teniendo en cuenta que $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$

<u>Observación</u>: Si un sistema homogéneo es de Cramer, la solución única es la trivial.

<u>Nota</u>: La regla de Cramer también es aplicable a sistemas compatibles indeterminados aplicándola a un sistema equivalente que sea de Cramer. Veámoslo: Sea el siguiente sistema compatible donde $rang(A) = rang(A|B) = k \leq \{m, n\}$

$$\left.\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{matrix}\right\}$$

. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{\vec{a}_1, \cdots\cdots, \vec{a}_k\}$ es linealmente independiente, que es lo mismo que decir que $rang \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2k} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots\cdots a_{kk} \end{pmatrix} = k$

Teniendo en cuenta que si en un sistema se elimina una ecuación que sea combinación lineal de las demás, el sistema que se obtiene es equivalente, podemos decir que el sistema inicial es equivalente a: $\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1n}\cdot x_n=b_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\cdots+a_{2n}\cdot x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\cdot x_1+a_{k2}\cdot x_2+\cdots+a_{kn}\cdot x_n=b_k \end{array}\right\}$, es decir, eliminamos las k filas dependientes de las demás.

Este sistema se puede escribir como: $\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1k}\cdot x_k=b_1-\sum_{j=k+1}^{n}a_{1j}x_j \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\cdots+a_{2k}\cdot x_k=b_2-\sum_{j=k+1}^{n}a_{2j}x_j \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\cdot x_1+a_{k2}\cdot x_2+\cdots+a_{kk}\cdot x_k=b_k-\sum_{j=k+1}^{n}a_{kj}x_j \end{array}\right\}$

Y llamando $c_i=b_i-\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}x_j$ nos queda: $\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\cdots+a_{1k}\cdot x_k=c_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\cdots+a_{2k}\cdot x_k=c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\cdot x_1+a_{k2}\cdot x_2+\cdots+a_{kk}\cdot x_k=c_k \end{array}\right\}$ que es un sistema de Cramer, siendo los términos independientes los c_i $1\le i\le k$ funciones respecto de las incógnitas $x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n$. Entonces aplicando la regla de Cramer: $x_i=f_i\left(x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n\right)$ $1\le i\le k$. Y así, las soluciones del sistema inicial vienen dadas por:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=f_1\left(\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\cdots,\lambda_n\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k=f_k\left(\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\cdots,\lambda_n\right) \\ \left.\begin{array}{l} x_{k+1}=\lambda_{k+1} \\ \cdots\cdots \\ x_n=\lambda_n \end{array}\right\}\ parámetros \end{array}\right\}$$ donde $\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\cdots,\lambda_n\in R$ son los parámetros.

5. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

La regla de Cramer nos permite obtener la solución de cualquier sistema compatible a cambio de realizar gran cantidad de operaciones. Debido a su ineficacia con sistemas de cinco o más ecuaciones vamos a estudiar otras formas de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Veremos el método de Gauss y alguna de sus variantes que nos dan la solución exacta gracias a una serie de operaciones elementales.

El método de Gauss transforma el sistema a resolver en otro equivalente tal que su matriz de coeficientes sea triangular superior siendo así fácilmente resoluble. El número de operaciones que hay que realizar es muy inferior al número de operaciones con el método de Cramer, sobre todo con un número elevado de ecuaciones.

5.1. Método de Gauss

El método de Gauss transforma un sistema $\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$ en otro equivalente con matriz de coeficientes triangular superior. Veamos los pasos a seguir:

Paso 1: Se consiguen ceros en la primera columna por debajo de la diagonal principal (suponemos $a_{11} \neq 0$ reordenando para ello el sistema su fuese necesario).

Aplicando al sistema inicial las ecuaciones:

$a'_{1j} = a_{1j} \quad 1 \leq j \leq n$ y $b'_1 = b_1$ (La primera ecuación se queda igual).

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{1j}\cdot\frac{a_{i1}}{a_{11}} \; y \; b'_i = b_i - b_1\cdot\frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad 2 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Obtenemos: $$\left.\begin{array}{r} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a'_{22}\cdot x_2 + a'_{23}\cdot x_3 + \cdots + a'_{2n}\cdot x_n = b'_2 \\ a'_{32}\cdot x_2 + a'_{33}\cdot x_3 + \cdots + a'_{3n}\cdot x_n = b'_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{m2}\cdot x_2 + a'_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a'_{mn}\cdot x_n = b'_m \end{array}\right\}$$

Resumiendo, las operaciones son: $E'_1 = E_1$ y $E'_i = E_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot E_1 \;\; 2 \leq i \leq m$ con E_i fila i.

Paso 2: Análogamente se consiguen ceros en la segunda columna por debajo de la diagonal principal (suponemos $a_{22}{}' \neq 0$ reordenando el sistema si fuese necesario). Aplicamos al sistema obtenido en el paso 1 las ecuaciones resumidas:

$$\begin{array}{l} E''_i = E'_i \quad con \quad 1 \leq i \leq 2 \\ E''_i = E'_i - \dfrac{a'_{i2}\cdot E'_2}{a'_{22}} \quad con \quad 3 \leq i \leq m \end{array}$$

. Obtenemos: $$\left.\begin{array}{r} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a'_{22}\cdot x_2 + a'_{23}\cdot x_3 + \cdots + a'_{2n}\cdot x_n = b'_2 \\ a''_{33}\cdot x_3 + \cdots + a''_{3n}\cdot x_n = b''_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a''_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a''_{mn}\cdot x_n = b''_m \end{array}\right\}$$

Paso k: Análogamente se consiguen ceros en la k-ésima columna por debajo de la diagonal principal (reordenando si fuera necesario ya que podemos suponer que $a_{kk}{}' \neq 0$, salvo en el caso en el que todos los $a_{jk} = 0 \quad k \leq j \leq m$ siendo entonces innecesario realizar este paso). Aplicamos al sistema obtenido en el paso $(k-1)$ las ecuaciones de forma resumida siguientes:

$$E_i^k = E_i^{(k-1)} \; con \;\; 1 \le i \le k$$

$$E_i^k = E_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} E_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \; con \;\; (k+1) \le i \le m$$

Después de $(m-1)$ pasos como mucho, se obtiene un sistema equivalente al inicial con matriz de coeficientes triangular superior. Así el sistema $AX = B$ será equivalente al sistema $TX = C$ con T matriz triangular superior. Se verifica que $rang(A) = rang(T)$ y que $rang(A|B) = rang(T|C)|$, lo cual resuelve fácilmente el sistema sin más que tener en cuenta:

1) El sistema es incompatible si y solo si $rang(T) \neq rang(T|C)$ y eso es equivalente a encontrar en $TX = C$ una ecuación del tipo $0 = C$ con $C \neq 0$
2) El sistema es compatible determinado si y solo si $rang(T) = rang(T|C) = n$, que es equivalente a que el sistema $TX = C$ sea de la forma:
$$\left.\begin{array}{r} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + t_{1n}x_n = c_1 \\ t_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + t_{2n}x_n = c_2 \\ t_{33}x_3 + \cdots + t_{3n}x_n = c_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{nn}x_n = c_n \end{array}\right\}$$
, siendo los elementos de la diagonal principal todos no nulos. El sistema se resuelve partiendo de la última ecuación y ascendiendo hasta la primera.

3) El sistema es compatible indeterminado si y solo si $rang(T) = rang(T|C) = k < n$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k = rang\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots\cdots & t_{1k} \\ 0 & t_{22} & \cdots\cdots & t_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & t_{kk} \end{pmatrix}$ lo que obliga a que todos los elementos de la diagonal principal sean no nulos hasta la k-ésima fija. Entonces el sistema inicial $AX = B$ es compatible indeterminado si y solo si el sistema equivalente $TX = C$ puede escribirse como:
$$\left.\begin{array}{r} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + t_{1k}x_k = f_1(c_1, x_{k+1}, \cdots, x_n) \\ t_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + t_{2k}x_k = f_2(c_2, x_{k+1}, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{nn}x_n = f_k(c_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \end{array}\right\}$$
, siendo las soluciones:
$$\left.\begin{array}{ll} x_i = g_i(\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n) & con \;\; 1 \le i \le k \\ x_j = \lambda_j & con \;\; (k+1) \le j \le n \end{array}\right\}$$
, donde los parámetros $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \cdots, \lambda_n$ son n^os^ reales.

Observación: en el paso k, $1 \le k \le m-1$, hemos dicho que el coeficiente $a_{kk}^{(k-1)}$ debe ser no nulo para que las ecuaciones tengan sentido (caso contrario reordenamos las ecuaciones). Lo que es un inconveniente importante es el hecho de que $a_{kk}^{(k-1)}$ sea muy pequeño y por tanto $\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$ muy grande y tener dificultades al trabajar con estos números. Los errores de redondeo podrían reducirse y aumentar paso a paso desvirtuando la solución. Por eso para resolver esta dificultad veremos a continuación variantes del método de Gauss.

5.2. Método de Gauss con Pivote Parcial

Consiste en tomar en el paso k en lugar del elemento $a_{kk}^{(k-1)}$ el elemento $a_{rk}^{(k-1)}$ tal que: $\left|a_{rk}^{(k-1)}\right| = máx\left\{\left|a_{ik}^{(k-1)}\right| \; tal \; que \; k \le i \le m\right\} \quad (el \; mayor \; de \; la \; columna \; k)$

Se trata de intercambiar la fila k por la fila r y seguir aplicando el método de Gauss

5.3. Método de Gauss con Pivote Total

Al igual que en anterior, en el paso k, en lugar de tomar el elemento $a_{kk}^{(k-1)}$ tomaremos el elemento: $máx\left\{\left|a_{ij}^{(k-1)}\right| \; tal \; que \; k \le i \le m; \, k \le j \le n\right\}$

Ahora no solo intercambiamos filas (ecuaciones) si no también columnas (incógnitas). Una vez realizado el intercambio y colocando el elemento elegido en el lugar $a_{kk}^{(k-1)}$ se sigue aplicando el método de Gauss.

5.4. Método de Gauss- Jordan

Dado el sistema $AX = B$, si A es una matriz cuadrada con $|A| \neq 0$, el método de Gauss puede ser completado triangulando también la parte superior, convirtiendo así la matriz A en una matriz diagonal. Esta variante se conoce con el nombre de método de Gauss- Jordan y consiste en convertir en cero todos los elementos de la matriz A menos los de la diagonal principal.

Dado el sistema $AX = B$ se transforma la matriz $(A|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$ por el método de Gauss en la siguiente matriz: $(T|\,C) = \left(\begin{array}{ccc|c} t_{11} & t_{12} \cdots\cdots & t_{1n} & c_1 \\ 0 & t_{22} \cdots\cdots & t_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & t_{nn} & c_n \end{array}\right)$, obteniéndose el sistema $TX = C$.

Para obtener ceros por encima de la diagonal principal en T se procede siguiendo el siguiente algoritmo:

<u>Primer paso</u>: Se consiguen ceros en la n-ésima columna de la matriz $(T\,|\,C)$ por encima de la diagonal principal, transformando cada ecuación E_i en E_i' mediante:

$$E_n' = E_n$$

$$E_i' = E_i - \frac{t_{in}}{t_{nn}} E_n \quad con \quad 1 \le i \le n-1$$

Paso k:

Se consiguen ceros en la columna $(n-k+1)$ por encima de la diagonal principal partiendo del sistema en el paso $(k-1)$, transformando cada ecuación $E_i^{(k-1)}$ en $E_i^{(k)}$ mediante:

$$E_i^{(k)} = E_i^{(k-1)} \text{ con } (n-k+1) \le i \le n$$

$$E_i^{(k)} = E_i^{(k-1)} - \frac{t_{i(n-k+1)}^{(k-1)}}{t_{(n-k+1)(n-k+1)}^{(k-1)}} \cdot E_{n-k+1} \text{ con } 1 \le i \le n-k$$

En a lo sumo $(n-1)$ pasos obtenemos el sistema: $\left(\begin{array}{l|l} d_{11} \quad 0 \cdots\cdots\cdots 0 & p_1 \\ 0 \quad d_{22} \cdots\cdots\cdots 0 & p_2 \\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 & \cdots \\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots d_{nn} & p_n \end{array}\right)$

Obteniéndose de forma trivial la solución como $x_j = \dfrac{p_j}{d_{jj}} \quad con \quad 1 \le j \le n$

6. SISTEMAS DEPENDIENTES DE PARÁMETROS

Hay veces que en los sistemas de ecuaciones lineales en los coeficientes y términos independientes aparecen uno o varios parámetros. El tipo de sistema dependerá de los valores que tomen dichos parámetros. Veamos un ejemplo:

Ejemplo: Estudiar en función del parámetro "a" el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=1 \\ ax-2y+4z=2 \\ 3x-2y+z=3 \end{array}\right\}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ a & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -a+42$. Vamos a distinguir dos casos:

Caso 1: Si $-a+42 \ne 0 \Rightarrow a \ne 42 \Rightarrow |A| \ne 0$ con lo cual el sistema es de Cramer y tiene solución única.

Caso 2: $-a+42 = 0 \Rightarrow a = 42 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13 \ne 0 \Rightarrow rang(A) = 2$. Además $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 42 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -442 \ne 0 \Rightarrow rang(A|B) = 3$

Entonces el sistema es incompatible.

7. ASPECTOS DIDÁCTICOS

Este tema debe encuadrarse en los contenidos mínimos de la asignatura Matemáticas de 2º Bachillerato. Es necesario que el alumno conozca los conceptos de ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema. Debe distinguir de qué tipo son los sistemas dependiendo del número de soluciones (compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible). Debe conocer y saber utilizar los métodos de Gauss-Jordan, de Cramer y de Rouché Fröbenius para resolver y discutir sistemas de ecuaciones. También debe estudiar sistemas dependientes de parámetros.

Es importante resolver gran cantidad de sistemas para asimilar bien los nuevos conceptos. Se precisará una semana para el estudio del método de Gauss-Jordan y dos semanas para el estudio de la regla de Cramer y el Teorema de Rouché.

- En el material didáctico aparte de pizarra, papel y bolígrafo, es interesante el uso de un ordenador con un lenguaje de programación general para practicar la resolución de sistemas. También pueden usarse calculadoras, incluso programables siempre que sea el alumno quien las programe, para ahorrar tiempo en la gran cantidad de cálculos necesarios. También podemos utilizar programas informáticos que ayudan a resolver dichas operaciones como Wiris…
- En cuanto a la evaluación se hará una prueba objetiva en la que se incluirá una resolución de un sistema de ecuaciones por el método de Gauss y el estudio de un sistema de ecuaciones dependiente de uno o varios parámetros.

Bibliografía

Álgebra Lineal: Alberto Luzárraga.

Álgebra y Geometría: Braulio de Diego. Editorial: Deimos.

Curso de Álgebra y Geometría: Juan de Burgos. Editorial: Alhambra.

Curso de Matemáticas Serie A: A. Negro, V. Zorio. Editorial: Alhambra.